

Parcial Módulo 2do. Matemática C (12/07/2010): Tema 2

Desa prof

0.25 1.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ a) Determinar el rango de la matriz, una base del espacio fila y una base del espacio columna.

0 b) Dado $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, indicar si b pertenece al espacio columna de A , justificando la respuesta.

0.25 c) Hallar la dimensión del espacio nulo de A y una base del mismo.

0 d) Si B_N es una base del espacio nulo de A y B_F una base del espacio fila de A , es $B_N \cup B_F$ una base de $\mathbb{R}^3$? Justificar la respuesta.

0 2. a) Dar una expresión explícita para la proyección ortogonal de un vector genérico $v = (x, y)$ sobre el vector $s = (1, 1)$

0 b) En particular para $v = (1, 3)$, determinar la proyección de v sobre s y la distancia mínima de v a la recta que pasa por el origen en la dirección del vector s .

0 c) Sea $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la transformación que proyecta un vector $v \in \mathbb{R}^2$ ortogonalmente sobre $s = (1, 1)$. Mostrar que P es una transformación lineal y hallar su representación matricial en la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

0 3. (a) Dada una matriz A , $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, dar la definición de los autovalores y autovectores de la matriz y explicar su significado.

0 (b) En particular, dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, indicar, justificando mediante resultados teóricos:

b1) Si los autovalores de A serán todos reales y si A tendrá un autovalor nulo

b2) Si A será diagonalizable y si existirá una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$, formada por autovectores de A .

0 (c) Hallar los autovalores de A y las bases de los correspondientes autoespacios. Indicar si existen matrices S y D , con D diagonal de 3×3 , tales que $A = SDS^{-1}$, hallándolas en caso afirmativo.

W 4. a) Utilizando resultados previos, determinar la solución general del sistema de ecuaciones difer-

enciales: $\begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \\ dz/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + z \\ y - z \\ x - y \end{pmatrix}$.

W b) Hallar la solución general de la ecuación $y'' + 2y' + y = e^t + 2$.

W 5. (a) Sea z el número complejo $z = (1 + i)/\sqrt{2}$. Hallar la representación polar de z y dar una expresión para el número $1/z$ y para z^{10} .

(b) Dada la matriz simétrica $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

0 (b1) Localizar los autovalores de A , usando el teorema de Gershgorin, y explicar en cuál intervalo se encuentran.

W (b2) Dar una expresión para las normas $\|A\|_2$ y $\|A^{-1}\|_2$ de una matriz A de $n \times n$ real y simétrica. En particular, hallar las normas $\|A\|_2$ y $\|A^{-1}\|_2$ de la matriz A dada (Ayuda: los autovalores son $\lambda_1 = 2.59, \lambda_2 = 4.00, \lambda_3 = 5.41$)

0 (c) ¿Es posible aplicar la descomposición de Cholesky para llevarla a la forma $A = R^T R$? ¿cuáles condiciones debe cumplir esta matriz A para poder realizarla? Explicar como son los factores R y R^T y como se calcula R .

Resolución

Parcial Tema 2.

①

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

dudas!
la base puede

$$\text{Aer} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_f = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{ó} \quad E_f = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B_f = \text{base del espacio fila} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}; \dim(E_f) = \text{Rango}(A) = 2$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_c = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(b) \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad b \in E_c?$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \alpha = ? \\ \beta = ? \end{matrix}$$

$$\Rightarrow 2 = \alpha - \beta \quad \begin{matrix} -1 = 2\beta \Rightarrow \beta = -1/2 \\ 1 - 2\beta = 2 \end{matrix}$$

$$1 = \alpha + \beta \Rightarrow \alpha = 1 - \beta \Rightarrow 1 - \beta - \beta = 2$$

$$5 = 2\alpha - 4\beta \Rightarrow \alpha = 3/2$$

$$5 = 2 \cdot 3/2 - 4(-1/2)$$

$$5 = 3 + 2$$

$$(c) N(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\}; \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$$

$$x = -3/2$$

$$y = -1/2$$

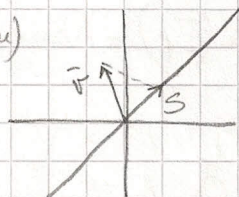
$$z = 1$$

$$N(A) = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} -3/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad B_{N(A)} = \left\{ \begin{pmatrix} -3/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \dim(N(A)) = 1$$

$$(d) \quad B_f \cup B_{N(A)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3/2 \\ -1 & 1 & -1/2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{si son linealmente independientes}$$

2- (a)



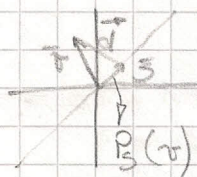
$$P_S(\vec{r}) = \frac{\vec{r} \cdot \vec{s}}{|\vec{s}|^2} \vec{s}$$

$$\vec{r} \cdot \vec{s} = (x \ y) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = x + y$$

$$|\vec{s}|^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

$$P_S \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \frac{x+y}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x+y}{2} \\ \frac{x+y}{2} \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad P_S \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1+3}{2} \\ \frac{1+3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$



$$\vec{d} = \vec{r} - P_S(\vec{r})$$

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La distancia mínima es el módulo $= |\vec{d}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$$(c) \quad P: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; \quad P(\vec{r}) = P_S(\vec{r}); \quad \text{si } \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \quad P(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \frac{x+y}{2} \\ \frac{x+y}{2} \end{pmatrix}$$

$$P(\alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2) = \alpha P(\vec{v}_1) + \beta P(\vec{v}_2) \quad ??$$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta x_2 \\ \alpha y_1 + \beta y_2 \end{pmatrix}$$

(2)

$$P(\alpha \bar{v}_1 + \beta \bar{v}_2) = \frac{\begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta x_2 + \alpha y_1 + \beta y_2 \\ \alpha x_1 + \beta x_2 + \alpha y_1 + \beta y_2 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha x_1 + \alpha y_1}{2} \\ \frac{\alpha x_1 + \alpha y_1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\beta x_2 + \beta y_2}{2} \\ \frac{\beta x_2 + \beta y_2}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \alpha \begin{pmatrix} \frac{x_1 + y_1}{2} \\ \frac{x_1 + y_1}{2} \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \frac{x_2 + y_2}{2} \\ \frac{x_2 + y_2}{2} \end{pmatrix} = \alpha P(\bar{v}_1) + \beta P(\bar{v}_2)$$

$$A = [P(e_1), P(e_2)] = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

3.- (a) $\boxed{Ax = \lambda x}$

ej: si $P(\bar{v}) = A\bar{v}$

Es una transformación lineal

$$P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Significado:

El transformado de Ax es un escalar por el mismo vector.

(b) Dada: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

característica: simétrica.

Para saber si tiene un autovalor nulo basta con calcular el determinante. $\det A = -2$

(b₂) Si es diagonalizable $\rightarrow$ la matriz es no-singular.

$$S^{-1} A S = D = \text{diagonal.}$$

$\downarrow \quad \downarrow$
mismos autovalores.

$$AS = SD$$

A los autovalores son todos distintos los autovectores con LI.

conj LI de vectores pueden convertirse en un conj. de vectores ortogonales.

(c) hallando los autovalores como son todos distintos los autovectores son LI y se puede armar una base ortogonal

4- (a) Sist. homogéneo.

$$y_{gh} = c_1 e^{\alpha_1 t} v_1 + c_2 e^{\alpha_2 t} v_2 + c_3 e^{\alpha_3 t} v_3$$

v_1, v_2, v_3 autovectores.

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ autovalores

c_1, c_2, c_3 constantes

(b) $y'' + 2y' + y = e^t + 2$

$$r^2 + 2r + 1 = 0$$

$$(r+1)^2 = 0$$

$r = -1$ raíz doble

e^{-t} $(t e^{-t})$ triquito

$y_{gnh} = y_{gh} + y_p$
 solución general de no-homogénea solución general homogénea solución particular

→ Sol general = $c_1 \cdot e^{-t} + c_2 t e^{-t}$

$y = A e^t + B$

y'
 y''
 y_p (y hallar el valor de B y A)

5- (a) $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$

se le puede calcular el argumento y el módulo

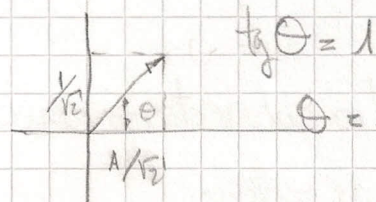
$$|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$$

$$z = \cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}$$

$$z = e^{i\pi/4}$$

$$\frac{1}{z} = (z)^{-1} = (e^{i\pi/4})^{-1} = e^{-i\pi/4} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

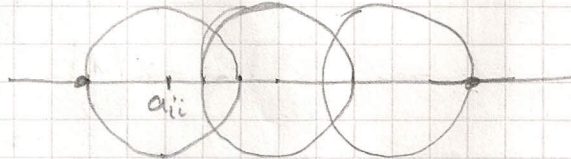
$$z^{10} = (e^{i\pi/4})^{10} = e^{i10\pi/4} = e^{i5\pi/2} = \cos 5\pi/2 + i \operatorname{sen} 5\pi/2$$



(b) Explicación general:

$$(b_1) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{i \neq j} |a_{ij}| \quad \forall i$$



(b₂)

$$\Lambda \rightarrow \lambda$$

$$\Lambda^{-1} \rightarrow 1/\lambda$$

el autovector mas chico de $\Lambda \rightarrow \lambda_1$
 " " mas grande de Λ^{-1} es
 $1/\lambda_1$

(c)

$$\Lambda = R^T R$$

↓
triang.
inf.

↓
triangular
superior

$$L \ U$$

$$L \ D \ L^T$$

↓
matriz
diagonal.

$$D^{1/2} \cdot D^{1/2}$$

$$L \cdot D^{1/2}$$

$$\downarrow$$

$$R^T$$

$$D^{1/2} L^T$$

$$\downarrow$$

$$R$$

Viernes 30

11⁰⁰ hrs

edificio
central.

TRANSFORMACIONES.

Pag 22

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_2 - x_3 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

se trabaja con los bases canónicas e_1, e_2, e_3 .

Pag 29

$$\begin{aligned} \text{con } x_1 = 1, y, x_2 = 1 &\rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \text{con } x_1 = -1, y, x_2 = 1 &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = x$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 3 \rightarrow x_1 = 3 + x_2 \\ x_1 + x_2 &= 1 \rightarrow 3 + x_2 + x_2 = 1 \rightarrow 2x_2 = -3 + 1 \rightarrow x_2 = -1 \\ x_1 &= 3 - (-1) = 4 \end{aligned}$$

Pag 30

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad B^T = \text{adj } Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Exten: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\det A = 2(8-2) - 1(12-0) + 1(3-0) = 12-12+3 = 3$

$$\begin{aligned} &\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - 3R_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{2R_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\xrightarrow{R_1 - R_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 + R_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 - R_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\xrightarrow{R_1 \cdot 1/2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \cdot 1/2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - 2R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 + R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\xrightarrow{R_1 \cdot 2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 - R_3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \cdot 1/2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pagina