

Recuperación

Autos y Autovectores
ec. dif.
cálculo numérico

Basma 55128

Parcial Módulo 2do. Matemática C (12/07/2010): Tema 1

- 0.5 1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ a) Determinar el rango de la matriz, una base del espacio fila y una base del espacio columna.
- 0.5 b) Dado $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, indicar si b pertenece al espacio columna de A , justificando la respuesta.
- 0.5 c) Hallar la dimensión del espacio nulo de A y una base del mismo.
- 0.5 d) Si B_N es una base del espacio nulo de A y B_F una base del espacio fila de A , es $B_N \cup B_F$ una base de $\mathbb{R}^3$? Justificar la respuesta.

- 0.6 2. (a) Dar la expresión de la proyección ortogonal de un vector $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sobre el vector $s = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, y explicar su significado.
- 0.6 b) En particular para $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, determinar la proyección de v sobre s y la distancia mínima de v a la recta que pasa por el origen en la dirección del vector s .
- 0.6 c) Sea $P: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la transformación que proyecta un vector $v \in \mathbb{R}^2$ ortogonalmente sobre $s = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Mostrar que P es una transformación lineal y hallar su representación matricial en la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

- 0 3. (a) Dada una matriz A , $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, dar la definición de los autovalores y autovectores de la matriz y explicar su significado.
- 0 { (b) Considerar la matriz A del ejercicio 1. Justificar, usando resultados teóricos conocidos:
- 0 { b1) Si los autovalores de A serán todos reales y si A tendrá un autovalor nulo
- 0 { b2) Si A será diagonalizable y si existirá una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores de A .
- 0.5 (c) Hallar los autovalores de A y las bases de los correspondientes autoespacios.
- 0.5 Indicar si existen matrices S y D , con D diagonal de 3×3 , tales que $A = SDS^{-1}$, hallándolas en caso afirmativo.

- no 4. (a) Utilizando resultados previos, determinar la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales $\begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \\ dz/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + z \\ x + 2z \\ x + 2y \end{pmatrix}$
- b) Hallar la solución general de la ecuación $y'' - 2y' + y = e^{-t} + 2$.

- no 5. (a) Sea z el número complejo $z = (1 - i)/\sqrt{2}$. Hallar la representación polar de z y dar una expresión para el número $1/z$ y para z^8 .

(b) Dada la matriz simétrica $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

(b1) Localizar los autovalores de A , usando el teorema de Gershgorin, y explicar en cuál intervalo se encuentran.

(b2) Dar una expresión para las $\|A\|_2$ y $\|A^{-1}\|_2$ de una matriz A de $n \times n$ real y simétrica. En particular, hallar las normas $\|A\|_2$ y $\|A^{-1}\|_2$ de la matriz A dada previamente (Ayuda: los autovalores de A son: $\lambda_1 = 1.59$, $\lambda_2 = 3.00$, $\lambda_3 = 4.41$)

(c) ¿Es posible aplicar la descomposición de Cholesky para llevar A a la forma $A = R^T R$? ¿Cuáles condiciones debe cumplir esta matriz A para poder realizarla? Explicar como son los factores R y R^T y cómo se calcula R .

Cholesky es métrica
 $L \times U$ no singular.