

1.- (a) Dada la transformación $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que a todo vector de $\mathbb{R}^2$ lo refleja respecto de la recta $y = x$.

- (a) Encontrar su matriz representativa en la base canónica.
- (b) Estudiar sus autovectores y autovalores e interpretar geoméricamente el significado de los autovectores.
- (c) Obtener la transformación resultante de aplicar a cada vector de $\mathbb{R}^2$ primero una rotación de 90° en sentido antihorario (hallar la matriz representativa en la base canónica), y luego una reflexión respecto de la recta $y = x$.

2.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Responder a cada ítem justificando las respuestas y haciendo los cálculos necesarios:

- (a) Dimensión de los espacios fila y columna.
- (b) Hallar una base de ambos subespacios fila y columna.
- (c) Cuánto vale el rango de la matriz A ?, y ¿cuál es la dimensión del espacio nulo $N(A)$?, y porqué?

(d) Dado el vector $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, ¿Es posible hallar la solución de $Ax = b$?. Porqué?

3.- Dada la misma matriz del ejercicio previo, haciendo los cálculos necesarios:

(i) Hallar los autovalores y autovectores correspondientes, determinando una base de cada autoespacio (subespacios invariantes).

(ii) ¿Es una matriz diagonalizable?. Si fuese afirmativa su respuesta, encontrar las matrices que llevan a ese resultado.

(iii) Dado el vector $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. ¿Puede expresar al vector v como una combinación de los autovectores

hallados?, si es posible, hallar los coeficientes correspondientes.

4.- (a) Hallar la solución general del sistema: $\begin{cases} x'(t) = x(t) \\ y'(t) = -2x(t) - 1y(t) \end{cases}$

(b) Resolver $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}$.

(c) Hallar la solución particular que satisface: $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

5.- (A) Sea $F = x^2 y^5 / z^3$, con x , y y z magnitudes independientes.

a1) Determinar el error relativo ϵ_r de F en términos de los errores relativos de x , y y z .

a2) Si las cantidades x , y , z son conocidas con 4 cifras significativas, determinar el error relativo y el número de cifras significativas de F .

(B) Determinar la única raíz de la ecuación $e^{-x} = 2x$, utilizando el método de Newton con el valor inicial $x_1 = 1$ y con una tolerancia (diferencia entre dos aproximaciones sucesivas) menor que 10^{-4} . Indicar el número de pasos necesarios y los valores $x_2, x_3, \dots$ obtenidos.

Explicar qué significa convergencia cuadrática en el método de Newton.

(C) (c1) Dar una expresión para la norma $\|A\|_\infty$ de una matriz A de $n \times n$ real, y la norma $\|A\|_2$ si A es real simétrica.

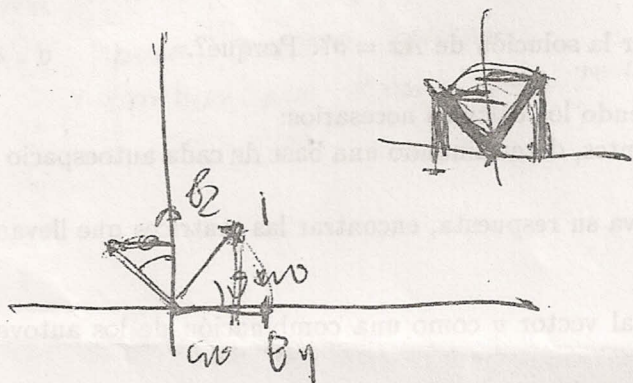
En particular, hallar la $\|A\|_\infty$ de la matriz A del ejercicio 2.

(c2) Definir el número de condición de una matriz A de $n \times n$ no singular. Explicar su significado e indicar el intervalo de valores que puede tomar el mismo.

(c3) Dar una expresión del número de condición de una matriz A real y simétrica no singular en términos

de los autovalores de A , utilizando la norma 2, por ejemplo aplicarla a $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10^{16} \end{pmatrix}$.

Obtener la Transformación resultante
de aplicar z a los vectores de $\mathbb{R}^2$ por
una rotación de 90° (en sentido horario)
y luego una reflexión respecto de la recta $y = x$



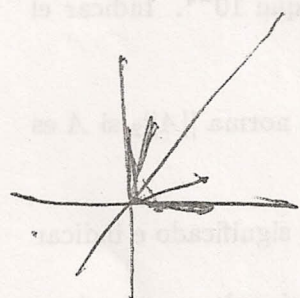
$$L_1(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$L_2(\theta) = \begin{pmatrix} -\sin \theta & \cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix}$$

$$[L] = A_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_1\left(\frac{\pi}{2}\right) A_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$



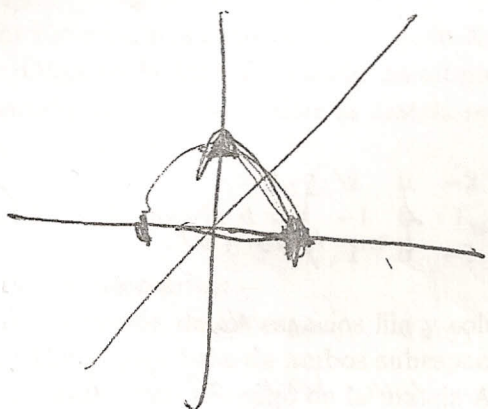
$$L(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$L(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

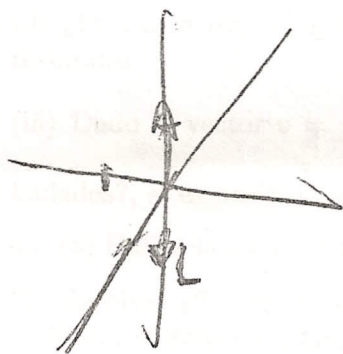
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$



$$L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$



Resumen

- o) Si $Ax=b$ de $n \times n$ $\Rightarrow$
si A es no singular, los vectores columna de A son L.I.
 $\Rightarrow$ forman una base de $\mathbb{R}^n$
 $\Rightarrow$ Cualquier vector columna b en $\mathbb{R}^n$
puede escribirse como comb. lineal de los vect. columna de A
 $\Rightarrow Ax=b$ tiene solución única

o) Cuando A es singular, el sistema $Ax=b$ puede tener $\begin{cases} 2 \text{ sol.} \\ \text{no tener sol.} \end{cases}$

- $\Rightarrow$ no forman una base de $\mathbb{R}^n$
 $\Rightarrow$ no todos los vectores b de $\mathbb{R}^n$ pueden escribirse como comb. lineal de los vectores columna de A . (porq. esos columnas no forman una base de $\mathbb{R}^n$)
 $\Rightarrow Ax=b$ puede no tener solución.
y también puede tenerla pero no es única